

PREDMET: MEHANIČKE OPERACIJE

PREDAVANJA:

Sadržaj predmeta je dat u vidu nastavnih jedinica/ispitnih pitanja sa objašnjenjem svake jedinice, koji je u skladu sa preporučenim udžbenikom i pomoćnim udžbenikom:

- Simonović D. i sar, **TEHNOLOŠKE OPERACIJE I – Mehaničke operacije**, Tehnološko-metalurški fakultet, Beograd (bilo koja godina)
- Veljković V., Banković-Ilić I., **Praktikum za Tehnološke operacije**, Tehnološki fakultet, Leskovac, 1991.

Studenti se mogu javiti predmetnom nastavniku putem e-mail-a sa pitanjima koji se tiču problema sa kojima se susreću prilikom savladavanja određene nastavne jedinice.

Kontakt: veljkovicvb@yahoo.com

A. OSNOVI MEHANIKE FLUIDA (održana predavanja!)

1. Osobine fluida
(osobine gasova i tečnosti; idealan fluid; fizičke osobine fluida)
2. Reološke osobine fluida
(njutnovski fluidi; nenjutnovski fluidi: Bingamovi plastični, pseudoplastični i dilatantni; fluidi sa vremenski promenljivom viskoznošću: reopektični i tiksotropni fluidi)
3. Statika fluida
(masene i površinske sile; jednačina hidrostatičkog pritiska; hidrostatički paradoks; osobine hidrostatičkog pritiska)
4. Ojlerove diferencijalne jednačine ravnoteže
(bilans sila koje deluju na fluid u mirovanju; uslov mirovanja)
5. Osnovna jednačina hidrostatičke
(promena hidrostatičkog pritiska elementarnog paralelopipeda i u celoj zapremini; fizički smisao osnovne jednačine hidrostatičke; Paskalov zakon)
6. Merenje pritiska
(U-manometar; kosi manometar; merenje pritiska gasa u sudu)
7. Jednačina kontinuiteta
(bilans mase za elementarni paralelopiped; lokalna i konvektivna promena gustine; fizički smisao izvoda gustine po vremenu; specijalni slučajevi jednačine kontinuiteta)
8. Ojlerove diferencijalne jednačine strujanja idealnog fluida
(bilans sila koje deluju na idealan fluid pri stacionarnom i nestacionarnom strujanju)
9. Bernulijeva jednačina
(primena Ojlerovih diferencijalnih jednačina na stacionarno strujanje idealnih fluida; visina položaja, visina hidrostatičkog pritiska i visina brzine; piezometarska cev)
10. Navie-Stoksova jednačina strujanja realnog fluida
(bilans sila koje deluju na realan fluid pri nestacionarnom strujanju; specijalni slučajevi)
11. Teorija sličnosti
(princip teorije sličnosti; geometrijska, mehanička, toplotna i hemijska sličnost; sličnost u dinamici fluida; invarijante sličnosti: simpleks i kriterijum sličnosti; indikator sličnosti; kriterijumi sličnosti: Ojlerov, Rejnoldsov, Frudov i Veberov kriterijum)
12. Primena teorije sličnosti u mehanici fluida
(izvođenje kriterijalne jednačine iz Navije-[toksove jednačine strujanja realnog fluida; model i prototip; uslov identičnosti jednačina strujanja za model i prototip; određivanje parametara kriterijalne jednačine)
13. Isticanje tečnosti iz rezervoara pri stalnom nivou

(primena Bernulijeve jednačine na rešavanje problema isticanja tečnosti iz suda; Toričelijeva jednačina; brzinski koeficijent; kontrakcija mlaza; koeficijent isticanja)

14. Isticanje tečnosti iz rezervoara pri promenljivom nivou
(bilans mase pri isticanju iz suda; vreme isticanja; specijalan slučaj: promena slobodne površine tečnosti sa promenom visine tečnosti u sudu)

B. HIDROMEHANIČKE OPERACIJE

1. Mehanizmi prenosa količine kretanja, toplote i mase (**održano predvanje – uvod u feneomene prenosa**)
(prenos u jednoj fazi i međufazni prenos; sličnost prenosa količine kretanja, toplote i mase; Rejnoldsov eksperiment i vizualizacija strujanja fluida; laminarno, preobražajno i turbulentno strujanje; molekularni i vrtložni mehanizam prenosa)
2. Molekularni mehanizam prenosa količine kretanja
(uslovi i pravac prenosa količine kretanja; specifičnosti prenosa količine kretanja u gasovima i tečnostima; model idealnog gasa; jednačina bilansa količine kretanja pri laminarnom strujanju; relacija između prenosa količine kretanja individualnim molekulima i sile smicanja; molekularna difuzivnost i kinematska viskoznost; njutnovski i nenjutnovski fluidi)
3. Vrtložni mehanizam prenosa količine kretanja
(pojam vrtloga; slika turbulentnog strujanja: primarni, intermedijerni i terminalni vrtlozi; fluktuacija brzine strujanja; izotropna turbulencija; Prantlov model vrtložnog mehanizma; jednačina bilansa količine kretanja pri turbulentnom strujanju; vrtložna difuzivnost)
4. Granični sloj pri opstrujavanju ravne ploče
(granični sloj pri opstrujavanju ploče paralelne sa strujom fluida; struktura graničnog sloja: laminarni podsloj, preobražajna oblast i turbulentna oblast; prelaz iz laminarne u turbulentnu oblast; odvajanje graničnog sloja pri opstrujavanju ploče postavljene vertikalno u odnosu na struju fluida; mehanizmi gubitaka energije u graničnom sloju: otpor usled podužnog trenja i otpor usled oblika)
5. Granični sloj pri strujanju fluida u cevi
(formiranje graničnog sloja; efekat ulazne dužine; razvijeni tok; struktura graničnog sloja; odvajanje graničnog sloja; mehanizmi gubitaka energije u graničnom sloju: otpor usled podužnog trenja i otpor usled oblika)
6. Analiza napona smicanja pri stacionarnom strujanju nestišljivog fluida u cevi
(jednačina bilansa sila; radijalna raspodela napona smicanja; primena Bernulijeve jednačine na strujanje fluida u cevi; visina gubitaka usled podužnog trenja; faktor trenja)
7. Analiza laminarnog i turbulentnog strujanja Njutnovskog fluida (**Udžbenik + material u prilogu**) 1
opis laminarnog i turbulentnog strujanja; radijalna raspodela brzine strujanja; fon Karmanov model turbulentnog strujanja: laminarni podsloj, preobražajna oblast i turbulentno jezgro; radijalna raspodela brzine strujanja: bezdimenzioni parametri brzine i položaja; zavisnost koeficijenta trenja λ od Rejnoldsovog broja i rapavosti cevi)
8. Izračunavanje brzine strujanja na osnovu poznatog pada pritiska
(pomoću fon Karmanovog dijagrama $1 / \sqrt{\lambda} = f(\text{Re} \sqrt{\lambda}, n)$; metoda “probaj i greši” pomoću zavisnosti $\lambda = f(\text{Re}, n)$, gde je n – relativna rapavost cevi)
9. Ekvivalentni prečnik cevi
(“živi” presek; okvašeni obim; hidraulički radijus; koeficijent trenja u cevima nekružnog poprečnog preseka)
10. Merenje protoka fluida pomoću Venturijeve cevi (**Praktikum**)
(princip rada Venturijeve cevi; veza između brzine strujanja fluida i pada pritiska primenom Bernulijeve jednačine i jednačine kontinuiteta; koeficijent Venturijeve cevi; nedostaci Venturijeve cevi)
11. Merenje protoka fluida pomoću prigušnice (**Praktikum**)
(princip rada prigušnice; veza između brzine strujanja fluida i pada pritiska primenom Bernulijeve jednačine i jednačine kontinuiteta; koeficijent prigušnice)
12. Merenje protoka fluida pomoću Pitoove cevi (**Praktikum**)

- (princip rada Pitoove cevi; veza između brzine strujanja fluida i pada pritiska primenom Bernulijeve jednačine; koeficijent Pitoove cevi; Pito-Prantlova cev)
13. Merenje protoka fluida pomoću rotametara (**Praktikum**)
(princip rada rotametra; bilans sila koje deluju na plovak rotametra; veza između brzine strujanja fluida i položaja plovka; koeficijent rotametra)
 14. Principi transporta tečnosti
(radna visina; visina usisavanja i neto pozitivna visina usisavanja; snaga crpke; volumetrijski, hidraulički, mehanički i ukupan koeficijent korisnog dejstva)
 15. Pulzometri
(princip rada; proračun pritiska radnog fluida)
 16. Mamutske crpke
(princip rada; snaga i koeficijent korisnog dejstva mamutske crpke)
 17. Ejektori
(princip rada; visina potiskivanja)
 18. Klipne crpke - prostog dejstva, dvojnog dejstva i diferencijalna
(princip rada; neravnomernost rada; poređenje kapaciteta; visina usisavanja)
 19. Potisne crpke
(zupčasta i Roots-ova crpka)
 20. Centrifugalne crpke
(princip rada; visina usisavanja; kavitacija)
 21. Karakteristika crpke
(karakteristika crpke i hidrodinamičke mreže; optimalni radni uslovi; radna tačka)
 22. Ventilatori
(princip rada radialnih i aksijalnih ventilatora; proračun ventilatora)
 23. Karakteristika ventilatora
(karakteristika ventilatora i ventilacione mreže; radna tačka)
 24. Kompresori
(princip rada kompresora prostog i dvojnog dejstva; teorijski indikatorski dijagram; poređenje rada izotermske, adijabatske i politropske kompresije; teorijski indikatorski dijagram sa štetnim prostorom; realni indikatorski dijagram; snaga kompresora; tandem kompresori)
 25. Strujanje fluida oko tela (opstrujavanja)
(strujanje tečnosti paralelno, vertikalno i pod uglom u odnosu na ravnu površinu; otpor usled oblika i otpor usled površinskog trenja; Njutnov zakon otpora; koeficijent otpora; opstrujavanje sfere: puzeće i turbulentno strujanje; poređenje koeficijenta otpora i koeficijenta trenja)
 26. Strujanje kroz poroznu sredinu - uski kanali
(izvođenje Karman-Kozenijeve jednačine; određivanje prečnika kanala i brzine strujanja; ekvivalentni prečnik kanala; poroznost sloja; prečnik ekvivalentne sfere; prividna brzina strujanja; pad pritiska kroz nepokretan sloja sa uskim kanalima; sferičnost)
 27. Strujanje kroz poroznu sredinu - široki kanali
(izvođenje Bark-Plamerove jednačine; određivanje prečnika kanala i brzine strujanja; ekvivalentni prečnik kanala; poroznost sloja; prividna brzina strujanja; pad pritiska kroz nepokretan sloja sa širokim kanalima; Ergunova jednačine; sferičnost)
 28. Filtracija kroz filtracionu pogaču (filtracija)
(principi filtracije; otpor filtracione pogače i otpor filtracionog medijuma; izvođenje osnovne i opšte jednačine filtracije; specifični otpor pogače; stišljiva i nestišljiva pogača; ekvivalentna zapremina filtrata; ispiranje filtracione pogače)
 29. Filtracija kroz filtracionu pogaču pri konstantnoj razlici pritisaka
(linearizacija opšte jednačine filtracije; eksperimentalno određivanje parametara opšte jednačine filtracije: specifičnog otpora pogače i otpora filtracionog medijuma, odnosno ekvivalentne zapremine filtrata)
 30. Filtracioni uređaji I
(princip rada gravitacionog filtera, vakuum-nuč filtera, ramske filter prese; princip rada kontinualnih filtera: obrtni i trakasti)
 31. Slobodno kretanje čestice kroz fluid

(bilans sila koje deluju na česticu: spoljna sila, sila potiska i sila otpora; diferencijalna jednačina jednodimenzionalnog kretanja; slobodno i stešnjeno kretanje; jednačina slobodnog kretanja u gravitacionom polju; terminalna brzina čestice: brzina taloženja; kretanje sfernih čestica; režimi kretanja: Štoksov zakon i Njutnov zakon)

32. Određivanje terminalne brzine čestice poznate veličine i sferičnosti
(izvođenje zavisnosti koeficijenta otpora od modifikovanog Rejnoldsovog broja $C_D = A_w / Re^{12}$ i njeno kombinovanje sa zavisnošću $C_D = f(Re^{12}, \Psi)$)
33. Određivanje veličine čestice poznate sferičnosti i zadate terminalne brzine
(izvođenje zavisnosti koeficijenta otpora od modifikovanog Rejnoldsovog broja $C_D = A_D Re^1$ i njeno kombinovanje sa zavisnošću $C_D = f(Re^1, \Psi)$)
34. Proračun gravitacionog taložnika (zgušnjivača)
(taloženje ili zgušnjavanje; dinamika šaržnog taloženja; proračuna šaržnog taložnika; kontinualno taloženje; uprošćen proračun kontinualnog taložnika; bilansi mase čvrste i tečne faze; princip rada Dorovog taložnika)
35. Diferencijalno taloženje (hidraulička klasifikacija)
(klasifikacija čestica na osnovu terminalne brzine; uslov potpunog razdvajanja čestica: odnos razdvajanja; klasifikacija u vertikalnoj i horizontalnoj struji fluida; proračun klasifikatora)
36. Centrifugisanje
(principi centrifugalne separacije; vreme boravka čestica u dobošu centrifuge; kritični prečnik čestice; kapacitet centrifuge koji odgovara kritičnom prečniku; Σ ili Amblerova karakteristika centrifuge; povećanje razmere centrifuge)
37. Cikloni
(princip rada ciklona; bilans sila koje deluju na česticu u ciklonu; terminalna brzina čestice)
38. Fludizacija
(principi fluidizacije; promena visine fluidizovanog sloja i pada pritiska sa brzinom strujanja fluida; tačka fluidizacije i minimalna brzina fluidizacije $w_{A,o}$; eksperimentalno određivanje $w_{A,o}$; izračunavanje $w_{A,o}$ pomoću Ergunove jednačine za sitne i krupne čestice; veza između brzine taloženja i minimalne brzine fluidizacije; partikularna i mehurasta fludizacija; uslovi nastajanja i karakteristike; visina fluidizovanog sloja)
39. Mešalice
(zadaci mešanja; aksijalne i radijalne mešalice; propelerske, lopataste i turbinske mešalice; sprečavanje stvaranja "stojećeg" vrtloga; mešalice za viskozne tečnosti: sidraste, spiralne ...)
40. Snaga mešanja
(faktor snage mešanja; fizički smisao faktora snage mešanja; kriterijalne jednačine za snagu mešanja njutnovskih i nenjutnovskih tečnosti; uticaj vrste i geometrije suda i mešalice i režima strujanja)

RAČUNSKE I LABORATORIJSKE VEŽBE

RAČUNSKE VEŽBE:

Predmetni asistent će svakog četvrtka slati studentima e-mail-om rešene računске zadatke iz određene oblasti u skladu sa nastavnim planom.

Studenti se mogu javiti predmetnom asistentu za pomoć oko eventualnih problema u rešavanju zadataka.

Kontakt: milankostic285@yahoo.com

LABORATORIJSKE VEŽBE:

Studenti treba da pripremaju ulazni kolokvijum na osnovu materijala koji im je preporučen.

Polaganje ulaznog kolokvijuma biće organizovano odmah po prestanku vanrednog stanja.

PRILOG !:

ANALIZA LAMINARNOG STRUJANJA

Razmotriće se laminarno strujanje Njutnovskog fluida kroz cev kružnog preseka. Napon smicanja definisan je Njutnovim zakonom:

$$\tau_r = -\mu \frac{dw}{dr}$$

Na osnovu bilansa sila koji deluju na nestišljiv fluid, važi jednakost:

$$\tau_r = \tau_R \frac{r}{R} = -\mu \frac{dw}{dr}$$

Profil brzine (raspodela brzine strujanja po poprečnom preseku)

Ova obična diferencijalna jednačina dozvoljava razdvajanje promenljivih i integrisanje sa početnim uslovom: za $r = R$ je $w = 0$. Prema tome, sledi

$$\int_0^w dw = -\frac{\tau_R}{\mu R} \int_R^r r dr$$

odnosno

$$w = \frac{\tau_R}{\mu R} \frac{r^2}{2} \Big|_R^r = \frac{\tau_R}{2\mu R} (R^2 - r^2)$$

Za $r = 0$, sledi

$$w_{\max} = \frac{\tau_R}{2\mu R} R^2 = \frac{\tau_R R}{2\mu}$$

ili

$$w = \frac{\tau_R}{2\mu R} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = \frac{\tau_R R}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = w_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

odnosno

$$\frac{w}{w_{\max}} = \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

tj. profil brzine laminarnog strujanja je paraboličan. Pošto je

$$\tau_R = \frac{R}{2L} (-\Delta p)$$

onda je

$$w = \frac{R}{2\mu R} \frac{(-\Delta p)}{2L} (R^2 - r^2) = \frac{(-\Delta p)}{4\mu L} (R^2 - r^2) = \frac{(-\Delta p)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

pri čemu je:

$$w_{\max} = \frac{(-\Delta p)R^2}{4\mu L}$$

Zapreminski protok kroz cev

Zapreminski protok kroz diferencijalni prsten je

$$d\dot{V} = w dS = \frac{(-\Delta p)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \cdot 2\pi r dr$$

Integriranjem uz početni uslov: za $r = 0$ je $\dot{V} = 0$, dobija se

$$\int_0^{\dot{V}} d\dot{V} = \frac{\pi(-\Delta p)}{2\mu L} \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r dr$$

tako da je

$$V = \frac{\pi(-\Delta p)}{2\mu L} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi(-\Delta p)}{2\mu L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi(-\Delta p)R^4}{8\mu L} = \frac{\pi(-\Delta p)d^4}{128\mu L}$$

Jednačina

$$V = \frac{\pi(-\Delta p)d^4}{128\mu L}$$

poznata je kao Hagen-Poisejejev zakon.

Srednja brzina strujanja fluida

$$w_{sr} = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\frac{\pi(-\Delta p)R^4}{8\mu L}}{\pi R^2} = \frac{(-\Delta p)R^2}{8\mu L}$$

Odnos srednje i maksimalne brzine strujanja

$$\frac{w_{sr}}{w_{max}} = \frac{\frac{(-\Delta p)R^2}{8\mu L}}{\frac{(-\Delta p)R^2}{4\mu L}} = 0,5$$

Gubici usled podužnog trenja

Iz jednačine za srednju brzinu strujanja sledi

$$(-\Delta p) = \frac{8\mu L w_{sr}}{R^2} = \frac{32\mu L w_{sr}}{d^2}$$

Ova jednačina se koristi za izračunavanje viskoznosti na osnovu izmerenog pada pritiska pri strujanju kroz cev poznatog prečnika i dužine. Deljenjem ove jednačine sa ρg i transformacijom, dobija se

$$\frac{(-\Delta p)}{\rho g} = 2 \cdot 32 \frac{\mu}{\rho w_{sr} d} \frac{L}{d} \frac{w_{sr}^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{L}{d} \frac{w_{sr}^2}{2g}$$

Poredjenjem ove jednačine sa Darsi-Vajsbahovom jednačinom, dolazi se do sledećeg rezultata

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

ANALIZA TURBULENTNOG STRUJANJA

Ova analiza se zasniva na fon Karmanovom modelu turbulentne struje nestišljivog fluida za cev kružnog preseka. Prema ovom modelu, turbulentna struja se sastoji iz tri dela, i to:

- laminarnog podsloja (uz sam zid cevi)
- prepbražajne oblasti i
- turbulentnog jezgra.

Prema fon Karmanu, profil brzina se može prikazati kao funkcija dva bezdimenzionalna parametra položaja i brzine, tj.:

$$y^+ = f(u^+)$$

Parametar položaja je, u stvari, modifikovani Rejnoldsov broj:

$$y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu}$$

gde je: $y = R - r$ - rastojanje od zida cevi i $u^* = \sqrt{\frac{\tau_R}{\rho}}$ - brzina trenja.

Parametar brzine je bezdimenzionalna brzina:

$$u^+ = \frac{u}{u^*}$$

gde je: u - brzina strujanja u posmatranoj tački.

PROFIL BRZINE

Laminarni podsloj

Pretpostavlja se da su gradijent brzine i napon smicanja konstantni, tj.

$$\tau_r \equiv \tau_R = -\mu \frac{du}{dr} = \text{const.}$$

Iz definicionih izraza za bezdimenzione parametre sledi

$$u = u^* \cdot u^+ \text{ i } du = u^* \cdot du^+$$

$$y = \frac{\mu}{\rho u^*} \cdot y^+ \text{ i } dy = \frac{\mu}{\rho u^*} \cdot dy^+$$

Takođe, pošto je $y = R - r$, onda je $dy = -dr$, tako da je

$$dr = -\frac{\mu}{\rho u^*} \cdot dy^+$$

Iz prve jednačine sledi

$$-\frac{du}{dr} = \frac{\tau_R}{\mu}$$

Posle zamena du i dr , dobija se

$$-\frac{u^* \cdot du^+}{-\frac{\mu}{\rho u^*} \cdot dy^+} = \frac{\tau_R}{\mu}$$

odnosno

$$\frac{du^+}{dy^+} = 1$$

Integriranjem gornje jednačine dobija se

$$u^+ = y^+ + C_1$$

Brzina strujanja na zidu cevi je jednaka nuli, tj. za $r = R$ ($y = 0$) je $u = 0$ ili za $y^+ = 0$ je $u^+ = 0$, tako da je $C_1 = 0$. Prema tome, profil brzine u laminarnom podsloju je

$$u^+ = y^+$$

Eksperimentom je utvrđeno da gornja jednačina važi ako je $y^+ < 5$.

Preobražajna oblast

Eksperimentom je utvrđena sledeća zavisnost između bezdimenzionih parametara

$$u^+ = 5,00 \ln y^+ - 3,05$$

koja važi ako je $5 < y^+ < 30$.

Turbulentno jezgro

Jednačina za fluks prenosa količine kretanja vrtložnim mehanizmom je

$$\tau_r = -\varepsilon_\tau \frac{d(\rho u)}{dr} = \varepsilon_\tau \frac{d(\rho u)}{dy}$$

Pošto je

$$\varepsilon_\tau = \frac{1}{2} l_y u' = \frac{1}{2} l_y \cdot l_y \left| \frac{du}{dy} \right| = \frac{1}{2} l_y^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$$

onda je

$$\tau_r = \frac{1}{2} l_y^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{d(\rho u)}{dy} = \frac{1}{2} \rho \cdot l_y^2 \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

Na osnovu eksperimenta može se usvojiti da je

$$\tau_r \cong \tau_R = \text{const.}$$

i

$$l_y = k_1 y$$

Sada je

$$\frac{\tau_r}{\rho} = \frac{1}{2} (k_1 y)^2 \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

odnosno

$$\sqrt{\frac{\tau_r}{\rho}} = k \cdot y \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)$$

Razdvajanje promenljivih i integrisanje daje kao rezultat

$$\int \frac{du}{u^*} = \frac{1}{k} \int \frac{dy}{y} + C_2$$

odnosno

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln y + C_2$$

što se može lako transformisati u oblika

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + C$$

Eksperimentom je utvrđena sledeća zavisnost između bezdimenzionih parametara

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5$$

koja važi ako je $y^+ > 30$.

Brzina strujanja

Debljine laminarnog podsloja i preobražajne oblasti su zanemarljive u odnosu na prečnik turbulentnog jezgra, tako da profil brzine može aproksimirati jednačinom

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5$$

koja onda važi za $0 \leq r \leq R$.

Prema ovoj jednačini bezdimenzionalna brzina u osi cevi je

$$u_o^+ = 2,5 \ln y_o^+ + 5,5$$

gde je $u_o^+ = \frac{u_{\max}}{u^*}$ i $y_o^+ = \frac{\rho u^* R}{\mu}$

Oduzimanjem druge od prve jednačine, dobija se

$$u^+ - u_o^+ = 2,5 \ln \frac{y^+}{y_o^+}$$

odnosno

$$u^+ = u_o^+ + 2,5 \ln \frac{y^+}{y_o^+}$$

Srednja brzina strujanja

$$w_{sr} = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\int_0^R u \cdot 2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u \cdot r dr = \frac{2}{R^2} u^* \int_0^R \frac{u}{u^*} \cdot (R - y) \cdot (-dy)$$